Capítulo Octavo
UNA REVOLUCIÓN EN GEOMETRIA Y UN PRONUNCIAMIENTO EN ÁLGEBRA

RIEMANN Y BOOLE

Los matemáticos ingleses de la primera mitad del siglo XIX sólo estudiaban lo que les interesaba particular y personalmente, como para distraerse, sin dar ninguna importancia a los problemas que preocupaban al resto de Europa, separada de ellos por una cinta de mar. Además de isla geográfica, Inglaterra era una isla matemática que vivía del jugo newtoniano. Un nacionalismo estrecho le impidió aceptar las teorías dé Leibniz, y la consecuencia fue que la Matemática inglesa quedó estancada durante un siglo: exactamente hasta el año 1812, en que se fundó la Sociedad Analítica de Cambridge, que puso remedio a tan lamentable estado de cosas. Claro es que sus fundadores tuvieron que enfrentarse con políticos de ignorancia ejemplar. Sirva de muestra el siguiente botón:

A principios del siglo XVII el Ministerio, de Hacienda inglés adoptó los *bastoncitos de Neper* para hacer las operaciones contables. Estos bastoncitos consistían en unas tiras rectangulares de madera de unos siete centímetros de largo por ocho, milímetros de ancho, divididas en nueve cuadrados por medio de líneas transversales, cada una de las cuales estaba encabezada por una cifra, y debajo de ésta sus productos por los números dígitos, escritos en los sucesivos cuadrados de modo que si el producto tiene dos cifras, la de las decenas se coloca en el triángulo superior de los dos en que cada diagonal divide el cuadrado. Mediante una manipulación engorrosa se hacía la multiplicación de los números de varias cifras; y en cuanto a la división tan complicada que constituía una verdadera tortura, hasta el punto de que solo la abordaban hábiles calculadores. Para ente absurdo sistema de operar, la burocracia inglesa creó una nube de escribientes, tenedores de libros y actuarios que se sucedieron por generaciones en las covachuelas del Ministerio hasta que un día, en tiempo de Jorge III (1760 - 1820), un ministro "revolucionario" tuvo la audacia de incoar un expediente para saber si debían seguir llevándose las cuentas por aquel procedimiento, análogo al de Robinson para tener al día el calendario en su isla desierta o cambiarse por otro más moderno. Se levantó tal tempestad de protestas que hubo que esperar hasta el año 1826 para que se decretara la desaparición de aquellos palitroques, cuyo número había crecido tan monstruosamente durante más de un siglo, que todavía en 1834 había tal cantidad que se planteó el problema de decidir lo que se iba a hacer con ellos. A cualquiera que no fuese un político conservador inglés se le hubiera ocurrido tirarlos, pero a un tory británico lo que se le ocurrió fue llevar a Westminster aquellos pedacitos de madera apolillados y podridos como si se tratara de una reliquia.

Era tan absurdo esto que, al fin, triunfó el sentido común y se dio la orden de quemarlos, pero clandestinamente para que no se alarmaran los conservadores. Los bastoncitos fueron arrojados a una estufa de la Cámara de los Lores donde se les prendió fuego, y como la madera era viejísima ardieron tan admirablemente que las llamas prendieron en los artesonados de la Cámara de los Lores, de ésta se propagó el fuego a la de los Comunes y a Inglaterra le costó la broma varios millones de libras esterlinas.

Los matemáticos alemanes, al revés que los ingleses, tenían más amplia visión; y a partir de las *Disquisitiones Aritmeticae* de Gauss, que se publicaron el primer año del siglo XIX, es interminable la lista de obras originales que aparecieron hasta 1855, fecha en que muere el *princeps mathematicorum* y queda roto el último lazo con la Matemática de la centuria anterior.

Una de los matemáticos que ilustran la primera mitad del siglo XIX es Bernardo Riemann, que nace en Breselenz, Hannover, el 17 de septiembre de 1826. Su padre, pastor luterano que tomó parte en las guerras napoleónicas, se hizo agricultor para subvenir a las necesidades de su familia: esposa v seis hijos, el segundo de los cuales fue Bernardo. Todos murieron jóvenes: el matemático cuando no había cumplido aún los cuarenta años. Algunos biógrafos de Riemann dicen que estas muertes prematuras no obedecen a ninguna tara hereditaria, sino a la escasa alimentación durante la infancia.

Siendo niño todavía, su padre fue nombrado pastor de Quiekborn, donde el pequeño Bernardo aprendió las primeras letras; y apenas tenía seis años cuando no sólo resolvía problemas de Aritmética elemental, sino que imaginaba otros más difíciles poniendo en más de un aprieto al maestro de escuela, y al cumplir los diez le dio lecciones de Matemática un profesional, Schulz, que no tardó en ir a remolque de su discípulo.

Al mismo tiempo que Riemann entraba en contacto con la Matemática en Alemania, un joven de veinte años abría un colegio privado en Inglaterra para enseñar esta ciencia. Se llamaba Jorge Boole y había nacido en Lincoln el 2 de noviembre de 1815. Como Riemann, era también de humilde origen. Su padre fue un modesto comerciante, uno de cuyos amigos, librero que sabía latín, enseñó a Jorge los secretos de la lengua del Lacio con tanta habilidad que cuando el que había de ser un gran matemático sólo contaba doce años, traducía a Virgilio en elegantes versos ingleses. Tan profundamente llegó a conocerlo que todos los escritos de Boole dejan traslucir su latinidad. Estudió después el griego, francés, alemán e italiano y, como era pobre, tuvo necesidad de ayudar económicamente a su padre, dedicándose a la enseñanza privada de la Matemática, que era la menos mal retribuida. Sólo quienes se han dedicado a esta labor, ingrata entre las más ingratas pueden comprender el suplicio de Boole explicando los manuales escolares de su época: malos y estúpidos. ¿Era aquello la Matemática?

Sin dirección, sin consejos, Boole leyó por su cuenta la *Mecánica celeste* de Laplace, que es una de las obras más difíciles de comprender si no se tiene una sólida preparación matemática, y luego la *Mecánica analítica* de Lagrange en la que no hay ni una sola figura que aclare el razonamiento. Su labor autodidacta de aquel tiempo cristalizó en una memoria sobre el cálculo de variaciones.

Riemann, en tanto, ingresaba en el Gimnasio de Lunenburgo, cuyo director, Schmalfuss, poseía una excelente biblioteca particular que puso a su disposición. El primer libro que cayó en sus manos fue la *Teoría de números* de Legendre: cerca de novecientas páginas, que Riemann devolvió a Schmalfuss a los seis días diciéndole sencillamente: "Es un libro admirable; lo he leído entero y lo he comprendido todo."

En 1846 fue a Gotinga, donde estudió Teología, pasando luego a Berlín, a cuya Universidad debió, su formación matemática, pues que fue discípulo de Jacobi, Dirichlet, Steiner y Eisenstein, que dejaron en él huella profunda.

Dos años después estalló el movimiento democrático en Alemania y él, realista convencido, custodió personalmente al rey durante diez horas en un día difícil.

En la misma fecha, Boole publicaba *The Mathematical analyse of Logic*, que es una anticipación de su obra fundamental. Sus amigos le aconsejaron que fuera a Cambridge, pero él se negó. La famosa Universidad, rival de la de Oxford, cultivaba la Matemática ortodoxa, y en el cerebro de Boole bullían ideas que habrían de considerarse heréticas en el campo de las ciencias exactas tal como se entendían en la Inglaterra de entonces. Además, sus padres estaban a su cargo y continuó dando lecciones, por causas exclusivas de tipo económicas, con arreglo a un criterio impuesto; que ésta es una de las mayores torturas de la enseñanza privada. Como Lope de Vega, podía decir Boole:

... y pues que paga es justo
hablarle en necio para darle gusto.

Un año después fue nombrado profesor del Queen's College, que acababa de inaugurarse en Cork, Irlanda, y allí intimó con el catedrático de griego, con cuya hija María Everest se casó.
Riemann, en tanto, se doctoraba en Gotinga el año 1851, con una tesis titulada *Grundlagen einer allgemeinen Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grosse*, de la que Gauss dijo en su informe oficial: "Esta tesis es una prueba fidedigna de las profundas y penetrantes investigaciones del autor en el punto de que se trata y denuncia, al propio tiempo, un espíritu creador, activo, realmente matemático, y de fecunda originalidad. El lenguaje es claro y conciso y, en algunos pasajes, bello y elegante. La mayoría de los lectores hubieran preferido, sin duda, mayor claridad en la exposición; pero, en su conjunto, este trabajo es un estudio sustancial cuyo valor intrínseco no sólo satisface las condiciones exigidas en una tesis para el Doctorado, sino que las supera ampliamente."
Poco después empezó a preocuparse por los problemas de Física matemática. Antinewtoniano, Riemann dice que "se puede establecer una teoría matemática completa y bien determinada, que progrese partiendo de las leyes elementales de los puntos individuales hasta los fenómenos que se presentan en el plenum de la realidad, sin distinción entre la gravitación, la electricidad, el magnetismo o la termostática".
Estas palabras, que no hubiera desdeñado de firmar Clarke, habrían indignado a Newton, quien, con su característica soberbia, habría arremetido violentamente contra Riemann que, anticipándose a las actuales teorías físicas, rechazaba la acción a distancia, base fundamental de los *Principia* newtonianos, cuyo autor no toleraba que se orientase en una dirección deísta su creencia en una causa final metafísica de la Naturaleza.
Guiado por sus nuevas aficiones, Riemann presentó para su prueba de *privat docent* tres temas creyendo que, según la costumbre, la Universidad elegiría el primero de la terna; pero eligió el tercero porque se refería a una cuestión sobra la que Gauss, que presidía el Jurado, llevaba meditando sesenta años., los fundamentos de la Geometría.
Riemann, sorprendido por la elección, trabajó con intensidad sobrehumana y escribió a su padre confiándole sus inquietudes. No ignoraba que Gauss, de acuerdo con su costumbre que retrasó en más de una ocasión su influencia en la Matemática, dejaba transcurrir años y años antes de dar a conocer los resultados, siempre geniales, de sus meditaciones, y tenía la seguridad de que el gran matemático había profundizado con su sagacidad excepcional en aquella cuestión. Buena prueba de ello era lo ocurrido hacía veinticinco años con los trabajos de Bolyai sobre la geometría no-euclídea, pero, sacando fuerzas de flaqueza, preparó el tema en siete semanas y pidió fecha para exponerlo. Por aquellos días, Gauss cayó enfermo y hubo de retrasarse la prueba, retraso que ocasionó la casi simultaneidad en dar a conocer públicamente los dos matemáticos a quienes se contrae este ensayo sus obras fundamentales.
En 1854, en efecto, Riemann da su *conferencia Über die Hypothesen welche der Geometrio zu Grunde liegen*, y Boole *publica An investigation into the laws of thought, on wich are founded the mathematioal theories of logic and probabilities*. La memoria de Riemann es un folleto de pocas páginas; la investigación de Boole es un libro de muchas páginas; pero el primero produjo una revolución en la Geometría y el segundo sólo fue un pronunciamiento en Álgebra, aunque como todos los pronunciamientos, cuando el pronunciado no es tonto, tuvo, y tiene todavía, algunas buenas consecuencias.

Con una audacia de pensamiento que contrasta con la timidez de su carácter, Riemann, a quien le aterraba la idea de tener que hablar en público, presentó la Geometría bajo un aspecto completamente nuevo, que entusiasmó a Gauss y sigue entusiasmando aún a los matemáticos. Considera dicha ciencia como no-euclídea, haciéndola depender del concepto de medida, pero en el que hay algo más que una filosofía práctica de la Matemática, a la que aspiran hoy la Física teórica, la teoría de la relatividad y la mecánica de los quanta.
Riemann parte del concepto de multiplicidad como clase tal que todo elemento de ella se pueda caracterizar asignándole ciertos números en un orden determinado, que correspondan a propiedades numerables, y llega a la consecuencia, aceptada por la Matemática actual de que el espacio es una multiplicidad-número, preocupándose de lo que es el espacio, aunque este es no signifique nada en relación con el espacio.
Como, dado el carácter de este cursillo, no es posible entrar en detalles que exigen recursos de Matemática pura para ahondar en el pensamiento de Riemann, baste decir que con la concepción de éste hemos aprendido a no creer en ningún espacio como necesidad de la percepción y a creer, en cambio, en tantos espacios y Geometrías como sean convenientes para un fin determinado, y en que lo mismo que hay diferentes clases de líneas y superficies, hay diferentes especies de espacios de tres dimensiones y sólo la experiencia puede decirnos a qué especie pertenece el espacio en que vivimos.
Rompiendo con la tradición anterior y colocándose en un punto de vista general, sin descender a detalles, con aquilina visión panorámica de la Geometría, Riemann sentó las bases de la Física geometrizada de hoy.
La obra de Boole es de otra índole. Dice que el objeto de su libro es "estudiar las leyes fundamentales de las operaciones del espíritu por las cuales se cumple el razonamiento, expresarlas en el lenguaje del cálculo y, sobre esta base, establecer la ciencia lógica y construir su método, y hacer de éste, el fundamento de un procedimiento general para la aplicación de la doctrina matemática de las probabilidades y, por último, recoger de estos diversos elementos de verdades, sacados a la luz en el transcurso de estas investigaciones, algunos indicios verosímiles sobre la naturaleza y constitución del espíritu humano. ¿Es un error considerar esto como la verdadera ciencia de la Lógica que, poniendo ciertas leyes elementales, confirmadas por el propio testimonio del espíritu, nos permite deducir por procedimientos uniformes la cadena completa de sus consecuencias secundarias y facilita, por sus aplicaciones prácticas, métodos de una absoluta generalidad? Existen, en efecto, ciertos principios generales, fundados en la verdadera naturaleza del idioma, por los que queda determinado el uso de los símbolos, que no son sino elementos del lenguaje científico. Estos elementos son arbitrarios en un cierto límite; su interpretación es puramente convencional y tenemos la facultad de emplearlos en el sentido que nos plazca; pero esta facultad está limitada por dos condiciones indispensables: primera, que no nos apartemos nunca, durante el transcurso del razonamiento, del sentido que hayamos admitido convencionalmente, y segunda, que las leyes que rijan el proceso se basen de una manera exclusiva en dicho sentido, fijado de antemano, o en la significación de los símbolos empleados. Con arreglo a estos principios, todo acuerdo que pueda establecerse entre las leyes de los símbolos de la Lógica y las del Álgebra, sólo resultará de un previo acuerdo de procedimientos, y ambos dominios quedan, pues, distintos e independientes, pero sometidos cada uno de ellos a sus leyes y condiciones propias. Ahora bien; las investigaciones reales contenidas en las páginas que siguen, presentan la Lógica bajo su aspecto práctico, como un sistema de procedimientos ejecutados con el auxilio de símbolos que tienen una interpretación definida y sometidos a leyes exclusivamente fundadas en esta interpretación; pero que demuestran al mismo tiempo que estas leyes tienen idéntica forma que las de los símbolos generales del Álgebra con la única adición de

que los símbolos de la Lógica están, además, sometidos a una ley especial a la que no lo están los de la cantidad".

La extensión de esta cita queda justificada por la excesiva importancia que se ha dado, y se da, a la Logística, habiendo llegado a decir Russell que Boole descubrió en su obra la Matemática pura; y desde 1904, año en que se celebró el II Congreso internacional de Filosofía de Ginebra, que adoptó la palabra Logística para designar esta rama de la Matemática, muchas han sido, y son, las discusiones sobre el tema.

Boole, fiel al programa que se había trazado, redujo la Lógica a una especie de Álgebra cuyos "razonamientos" son manipulaciones de fórmulas muy sencillas. Hasta entonces, la Lógica y la Matemática habían vivido aisladas una de otra o incluso ignorándose mutuamente. La Lógica se movía dentro del dominio que le habla asignado Aristóteles, y la Matemática, mejor dicho, ahora, las Matemáticas, en plural, era una colección de ciencias de tipo técnico, separadas en compartimentos estancos con arreglo a un criterio que persiste todavía en muchas partes: ciencia del número, ciencia de la magnitud, ciencia del espacio, ciencia del movimiento, etc., con una atomización incompatible con la síntesis unitaria de la Matemática desde la época cartesiana. Todas estas ramas solo tenían común el método, dándose el caso, verdaderamente peregrino, de que la Lógica, que pretendía estudiar todas las formas de la deducción, ignoraba el método deductivo de la Matemática.

Esto cambió, afortunadamente, a mediados del siglo XIX, en que, desaparecidos los tiempos que siguieron a Newton, nació un rigor demostrativo, una generalización y una independencia de espíritu sin precedentes. A principios del siglo XIX, Gauss tuvo la intuición de lo que iba a pasar, pero no se atrevió a descubrir su pensamiento. Si hubiera comunicado sus ideas a Lagrange, a Laplace y a Legendre, el triunvirato francés de las L, otra cosa hubiera sucedido y aquélla sí que habría sido una verdadera entente franco-alemana, porque aunque estos tres matemáticos vivieron en el primer tercio del siglo XIX, la mayor parte de sus obras son obras de preparación. La teoría de ecuaciones de Lagrange roturó el terreno en que Abel y Galois sembraron la semilla del Álgebra nueva; las investigaciones de Laplace sobre ecuaciones diferenciales fueron el preludio del desarrollo de la Física matemática, y los estudios de Cálculo Integral de Legendre inspiraron a Jacobi uno de los más fecundos recursos con que cuenta hoy el Análisis.

Una gran parte de la nueva orientación se debe a Riemann y a Boole; pero así como la obra de aquél es indiscutible y sus ideas parecen tener una solidez inquebrantable, las de éste se hallan todavía en la zona polémica. La revolución hecha por Riemann en Geometría, como todas las revoluciones triunfantes, ha sido codificada ya y tiene estado legal; pero el pronunciamiento de Boole no ha conseguido aún que sea reconocido universalmente y hay todavía sectores de opinión en los que no tiene representantes acreditados.

Nadie pone en duda hoy que la ampliación al espacio del concepto gaussiano de curvatura hecho por Riemann, aplicado especialmente al nuestro de tres dimensiones, hace posible el movimiento de las figuras sin deformación, punto en que se apoya el empirismo de Helmholtz, su sucesor inmediato en el orden histórico para establecer el axioma de libre movilidad en tomo al cual gira la filosofía matemática de Russell, si bien éste le ha dado una orientación logística, y todo el mundo está de acuerdo en que, gracias a Riemann, la asimilación kantiana de las formas intuitivas a las formas lógicas no sólo ha desaparecido, sino que la imaginación constructiva del matemático ha adquirido una libertad que no pudo entrever el filósofo de Königsberg, y empezamos ya a pensar en la conveniencia de no admitir la necesidad intrínseca de ninguna proposición primera.

En cambio, no todos los matemáticos están de acuerdo con Boole. Sin palabras, sin oraciones sintácticas, valiéndose únicamente de un idioma simbólico, Boole pretende resolver el debate

pendiente desde Leibniz y Kant; niega los juicios sintéticos a priori, anula el papel de la inducción e intenta reducir la Matemática a la Lógica.
"Si al final, dice Brunschvicg en sus *Etapes de la philosophie mathematique*, ha parecido falaz la idea de apoyarse en la inteligibilidad del número entero positivo para justificar a prior¡ la verdad matemática, es porque hay contradicción entre la concepción aritmetista que procede de lo particular a lo general y las condiciones de la justificación a prior¡ que implican una deducción a partir de nociones más generales. El aritmetismo debe, por consiguiente, ser considerado como una etapa de un movimiento que, más allá de las formas especificas del número, se une a las formas universales del ser, movimiento que parece obedecer a la naturaleza del espíritu humano, puesto que es el mismo que hemos visto producirse del pitagorismo al aristotelismo. Pero la Lógica formal de Aristóteles sólo es el prototipo de la Logística contemporánea. En contacto con los métodos modernos, e imitando el algoritmo perfeccionado de la Matemática, la Logística ha manifestado una flexibilidad de análisis y una preocupación por el rigor de las que aquélla permanece infinitamente alejada. La Logística es una nueva técnica."
Pero esta técnica tiene graves inconvenientes. La hipertrofia del simbolismo, el aislamiento de la realidad, la ruptura de todo contacto con el mundo exterior, es tan peligrosa como los balones de oxígeno que se administran a los enfermos desahuciados: que lo mismo se muere por asfixia en una atmósfera de oxígeno puro que en una atmósfera de anhídrido carbónico; y aquí vienen como anillo al dedo estas palabras de Klein:, "Cuando se asciende a una montaña se va notando que la pureza de la atmósfera aumenta en cada momento; pudiera, pues, creerse que si se asciende indefinidamente el bienestar que se experimenta sería cada vez mayor. Todo el mundo sabe, sin embargo, que esto no ocurre, sino que, por el contrario, existe un límite de altura, pasado el cual la vida se hace imposible. Análogamente puede decirse que en la ascensión de los lógicos hacia la pureza científica eliminando la intuición, en lo posible, pues aun los símbolos de Peano tienen un resto de elementos intuitivos, se encuentran innegables ventajas; pero sólo hasta cierto límite, que no puede ser superado sin que el excesivo predominio de la Lógica produzca la esterilidad del razonamiento."
Boole y Riemann sobrevivieron pocos años al conocimiento de sus obras: diez el primero y doce el segundo. Los últimos de Boole se deslizaron plácidamente, sin que se encuentre en ellos nada digno de recordación especial. Fueron años dedicados a la investigación desinteresada y romántica, a la búsqueda de la Verdad por la Verdad, sin otro objetivo que la íntima satisfacción espiritual, hasta el último día de su vida: el 8 de diciembre de 1864, en que murió de una pulmonía ocasionada por una mojadura al ir a dictar una conferencia.
Los años finales de Riemann, en cambio, fueron accidentados. Obtenida la deseada licencia docente en 1854, y luego de un pequeño descanso con su familia en Quickborn, regresó a Gotinga, y el 9 de octubre de aquel año explicó su primera lección en la Universidad, y grande fue su sorpresa al encontrarse con ocho alumnos, pues él no esperaba más que dos o tres.
Al año siguiente murió Gauss y fue Dirichlet nombrado para sucederle. Los amigos de Riemann, sabedores de su talento matemático y también de sus inaplazables necesidades económicas, pidieron un puesto para él, pero la Universidad era pobre y sólo pudo ofrecerle un pequeño sueldo fijo, que Riemann, naturalmente aceptó.
A los pocos meses murieron su padre y su hermana Clara. Sus otras hermanas, comprendiendo que serían una carga para el modesto profesor, se fueron a vivir con su hermano mayor, empleado de Correos en Bremen y cuyos ingresos, comparados con los del matemático, eran enormes. Como decía el funcionario postal, su hermano era "un no valor económico". Y tenía razón.
Dedicarse a la Matemática por la Matemática, sin otro objetivo que la persecución de la Verdad, sin otro aliciente que la emoción científica, sin otra mira que la de respirar el aire aséptico del

pensamiento puro, sin otro interés que el de bañar el alma en la luz de la Idea, luz quieta, luz serena, como la luz cenital, que no proyecta sombras, ha sido, es y será una perfecta locura para los espíritus prácticos, terriblemente prácticos, que florecen en todas las latitudes con la espontaneidad con que brotan los cardos en las tierras arenosas.

El cerebro de Riemann, sometido a una presión excesiva, que no corría parejas con la subalimentación a que estaba sometido, sufrió un eclipse y los médicos le aconsejaron reposo. Afortunadamente, tenía un amigo en la accidentada región del Hartz y allá se marchó y allá fue también Dedekind, que era entonces profesor del Politécnico de Zurich. Paseando por la montaña, y discurriendo sobre temas que no exigían ningún esfuerzo mental, Riemann recobró la salud.

Al regresar a Gotinga fue nombrado profesor adjunto. Empezaba la liberación económica; pero diríase que el sino de Riemann era sufrir. Apenas había comenzado a disfrutar de una situación, modestísima, pero segura, murió su hermano y tuvo que atender al sostenimiento de sus hermanas. Una pirueta del destino le alivió la carga poco después: María, la menor, siguió a su hermano a la tumba, lo que hace pensar en dar la razón a quienes como se dijo al principio, atribuyen las prematuras muertes de los Riemann a la falta de alimentación adecuada en sus primeros años.

En 1859 quedó vacante la cátedra de Dirichlet, por fallecimiento de éste, 5 de mayo y la Universidad llamó a Riemann para sucederle, y, como a Gauss, lo alojó en el Observatorio astronómico. Ahora sí que parecía segura la liberación. El prestigio de Riemann había atravesado ya las fronteras de Alemania y la Royal Society de Londres y la Academia de Ciencias de París le nombraron miembro correspondiente.

Con este último motivo Riemann fue a la capital de Francia, en donde conoció personalmente a Hermite, que le profesaba honda admiración, el año 1860, fecha importante en la historia de la Física matemática porque marca una notable memoria de *Riemann Sobre un problema relativo a la conducción del calor,* en la que establece un sistema de formas diferenciales cuadráticas, en relación con sus investigaciones sobre los fundamentos de la Geometría, que, andando el tiempo, habrían de ser la base de la teoría de la relatividad.

Resuelto ya el problema económico, y sin la angustia diaria de la urgencia biológica, Riemann pensó en casarse. Tenía treinta y seis años cuando contrajo matrimonio con Elisa Koch, amiga de sus hermanas. Al mes de casado tuvo una pleuresía que le acarreó la tuberculosis.

Ante esta situación, sus amigos le consiguieron una bolsa de viaje, y aquel invierno, 1862, lo pasó en Italia. Regresó a Alemania en la primavera siguiente, pero cayó enfermo en seguida, y en agosto volvió en busca del cielo azul y del clima templado del mediodía, viéndose obligado a detenerse en Pisa, a causa de la fatiga que le producía el viaje. Allí nació su hija Ida.

El invierno siguiente fue tan excepcionalmente frío que hasta se helaron las aguas del Arno. La Universidad de Pisa ofreció una cátedra a Riemann, que éste no pudo aceptar por su lastimoso estado de salud; pero la de Gotinga le prolongó generosamente el permiso y hasta le envió un refuerzo económico que le permitió instalarse en una casita de campo de los alrededores de Pisa, donde murió su hermana Elena y donde él se agravó lamentablemente.

En vano intentó mejorar en Livorna y en Génova. Sintiendo la nostalgia de su patria, regresó a Gotinga en octubre de 1865; pero bien pronto se convenció de que su curación era imposible en Alemania y volvió a Italia, pasando sus últimos días en Selasca, a orillas del lago Mayor, donde murió el 20 de julio de 1866.

Dedekind, su colega y amigo, que profesaba al matemático tan grande admiración como cariño al hombre, cuenta su muerte con estas sencillas y emocionadas palabras: "Sus fuerzas declinaban rápidamente y comprendió que el final estaba próximo. El día antes de morir estudiaba a la sombra de una higuera y su alma estaba alegre ante el maravilloso paisaje; pero la vida se le escapaba dulcemente, sin lucha y sin agonía. Diríase que presenciaba con interés cómo se separaba el alma del cuerpo. Su esposa le dio un poco de pan y vino, y él le dijo entonces: “Dale un beso a nuestra hijita”, y juntos empezaron a rezar el padrenuestro. Al llegar a “perdónanos nuestras deudas” Riemann alzó lentamente los ojos al cielo. Ella estrechó su mano, cada vez más fría, entre las suyas, y, luego de un suspiro muy hondo, dejó de latir aquel noble corazón. La dulzura que había respirado en su infancia no le abandonó nunca. Sirvió a Dios fielmente, como lo había servido su padre, pero de manera distinta."

El epitafio de la tumba que le erigieron sus amigos italianos termina con estas palabras en alemán: "Todas las cosas trabajan para el bien de los que aman al Señor."